大學入學考試中心
102 學年度指定科目考試試題
數學甲

—作答注意事項—

考試時間：80 分鐘

作答方式：
- 選擇（填）題用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。
- 非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答案卷」上作答；更正時，可以使用修正液（帶）。
- 未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案；或未使用黑色墨水的筆書寫答案卷，致評閱人員無法辨認機器掃描後之答案者，其後果由考生自行承擔。
- 答案卷每人一張，不得要求增補。

選填題作答說明：選填題的題號是 A，B，C，……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\dfrac{⑱}{⑲}$，而依題意計算出來的答案是 $\dfrac{3}{8}$，則考生必須分別在答案卡上的第 18 列的 $\overset{3}{\square}$ 與第 19 列的 $\overset{8}{\square}$ 畫記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
18	□	□	■	□	□	□	□	□	□	□	□	□
19	□	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□

例：若第 C 題的答案格式是 $\dfrac{⑳㉑}{50}$，而答案是 $\dfrac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 $\overset{-}{\square}$ 與第 21 列的 $\overset{7}{\square}$ 畫記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
20	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	■	□
21	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□	□

數學甲

第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題共占 76 分）

一、單選題（占 24 分）

說明：第 1 題至第 4 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 設 z 為一複數，且 $\dfrac{z-2}{z+2}=i$（其中 $i=\sqrt{-1}$ 為虛數單位）。試問 z 的絕對值 $|z|$ 為下列哪一個選項？

(1) $\dfrac{1}{2}$　(2) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(3) 1　(4) $\sqrt{2}$　(5) 2

數學甲

2. 坐標平面上，直線 $x=2$ 分別交函數 $y=\log_{10}x$、$y=\log_2 x$ 的圖形於 P、Q 兩點；直線 $x=10$ 分別交函數 $y=\log_{10}x$、$y=\log_2 x$ 的圖形於 R、S 兩點。試問<u>四邊形</u> $PQSR$ 的面積最接近下列哪一個選項？（$\log_{10}2\approx 0.3010$）

(1) 10　(2) 11　(3) 12　(4) 13　(5) 14

3. 袋中有大小相同編號1到8號的球各一顆。小明自袋中隨機一次取出兩球，設隨機變數 X 的值為取出兩球中的較小號碼。若 p_k 表 X 取值為 k 的機率（$k=1,2,\cdots,8$），試問有幾個 p_k 的值大於 $\frac{1}{5}$？

(1) 1 個　(2) 2 個　(3) 3 個　(4) 4 個　(5) 5 個

4. 考慮所有由1、2、3、4、5、6各一個與三個0所排成形如 $\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{bmatrix}$ 對角線均為0的三階方陣。今隨機選取這樣一個方陣，試問其行列式值 $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{vmatrix}$ 為奇數的機率為下列哪一個選項？

(1) $\frac{1}{20}$　(2) $\frac{1}{10}$　(3) $\frac{1}{2}$　(4) $\frac{9}{10}$　(5) $\frac{19}{20}$

二、多選題（占 40 分）

說明：第 5 題至第 9 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4.8 分；答錯 2 個選項者，得 1.6 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

5. 令 $A(-2,0)$、$B(0,1)$、$C(2,1)$、$D(4,3)$為坐標平面上四點。請選出正確的選項。

(1) 恰有一直線通過 A、B、C 三點

(2) 恰有一圓通過 A、B、D 三點

(3) 恰有一個二次多項式函數的圖形通過 B、C、D 三點

(4) 恰有一個三次多項式函數的圖形通過 A、B、C、D 四點

(5) 可找到兩平行直線，其聯集包含 A、B、C、D 四點

數學甲

6. 設 c 為實數，E_1、E_2、E_3 皆為坐標空間中的平面，其方程式如下：

E_1： $cx+y=c$

E_2： $cy+z=0$

E_3： $x+cz=1$

已知 E_1、E_2、E_3 有一個交點的 z 坐標為 1，請選出正確的選項。

(1) $(1,0,0)$是 E_1、E_2、E_3 的一個交點

(2) E_1、E_2、E_3 有無窮多個交點

(3) E_1、E_2、E_3 中一定有兩個平面重合

(4) $c=1$

(5) E_1、E_2、E_3 有一個交點的 z 坐標為 2

7. 令 $f(x)=x^3-x^2-2x+1$。設 a、b、c 為方程式 $f(x)=0$ 的三個實根，且 $a<b<c$，請選出正確的選項。

(1) 極限 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}$ 存在

(2) a、b、c 至少有一個在 0 與 1 之間

(3) $a, a^2, a^3,\ldots, a^n,\ldots$ 為收斂數列

(4) $b, b^2, b^3,\ldots, b^n,\ldots$ 為收斂數列

(5) $c, c^2, c^3,\ldots, c^n,\ldots$ 為收斂數列

8. 考慮函數 $f(x)=|\sin x|+|\cos x|$，其中 x 為任意實數。請選出正確的選項。

(1) $f(-x)=f(x)$ 對所有實數 x 均成立

(2) f 的最大值為 $\sqrt{2}$

(3) f 的最小值為 0

(4) $f(\frac{\pi}{10})>f(\frac{\pi}{9})$

(5) 函數 f 的（最小正）週期為 π

數學甲

9. 考慮向量 $\overrightarrow{u}=(a,b,0)$、$\overrightarrow{v}=(c,d,1)$，其中 $a^2+b^2=c^2+d^2=1$。請選出正確的選項。

(1) 向量 $\overrightarrow{v}$ 與 z 軸正向的夾角恆為定值（與 c、d 之值無關）

(2) $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$ 的最大值為 $\sqrt{2}$

(3) $\overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{v}$ 夾角的最大值為 $135°$

(4) $ad-bc$ 的值可能為 $\frac{5}{4}$

(5) $|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}|$ 的最大值為 $\sqrt{2}$

數學甲

三、選填題（占 12 分）

說明：1.第 A 與 B 題，請將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號(10–15)。
2.每題完全答對給 6 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 設 A、B、C、D為空間中四個相異點，且直線 CD垂直平面 ABC。已知 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=10$，$\sin\angle ABC=\frac{4}{5}$，且 $\angle ABC$為銳角，則 $\overline{AD}=$ ⑩$\sqrt{⑪}$。

（化成最簡根式）

B. 設 m為實數。若圓 $x^2+y^2+4x-7y+10=0$與直線 $y=m(x+3)$在坐標平面上的兩個交點位於不同的象限，而滿足此條件的 m之最大範圍為 $a<m<b$，則 $a=\frac{⑫}{⑬}$、$b=\frac{⑭}{⑮}$。（化成最簡分數）

—————— 以下第貳部分的非選擇題，必須作答於答案卷 ——————

數學甲

第貳部分：非選擇題（占 24 分）

說明：本部分共有二大題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明大題號（一、二）與子題號（(1)、(2)、……），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至給零分。作答務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。每一子題配分標於題末。

一. 設 $p(x)$ 為一實係數多項式，其各項係數均大於或等於 0。在坐標平面上，已知對所有的 $t \geq 1$，函數 $y = p(x)$、$y = -1 - x^2$ 的圖形與直線 $x = 1$、$x = t$ 所圍成有界區域的面積為 $t^4 + t^3 + t^2 + t + C$（其中 C 為常數）。

(1) 試說明 $p(x) > -1 - x^2$ 對所有的 $x \geq 1$ 均成立。（2 分）

(2) 設 $t \geq 1$，試求 $\int_1^t (-1 - x^2)dx$。（3 分）

(3) 試求 C。（2 分）

(4) 試求 $p(x)$。（5 分）

二. 設 $A(1,0)$、$B(0,1)$ 為坐標平面上兩點，C 為直線 AB 外一點。經平面線性變換 M 作用後，A 被映射至 $A'(1,\sqrt{2})$、B 被映射至 $B'(-1,\sqrt{2})$，而 C 被映射至 C'。

(1) 試問變換 M 的矩陣為何？（4 分）

(2) 試證明變換 M 將 ΔABC 的重心映射至 $\Delta A'B'C'$ 的重心。（4 分）

(3) 若 ΔABC 的面積為 3，試求點 C' 與直線 $A'B'$ 的距離。（4 分）

數學甲

數學甲試題解析

試題編號：1

参考答案：(5)

學科內容：複數平面、絕對值

測驗目標：複數的運算及基本性質。

試題解析：【法一】

將題設 $\dfrac{z-2}{z+2}=i$ 乘開化簡得 $z=\dfrac{2(1+i)}{1-i}=2i$，故 $|z|=2$。

【法二】

設 $z=a+bi$，由題設 $\dfrac{z-2}{z+2}=i$，得 $\dfrac{(a+bi)-2}{(a+bi)+2}=i$，化簡得 $a=0$、$b=2$，故 $|z|=2$。

故答案為(5)

試題編號：2

参考答案：(3)

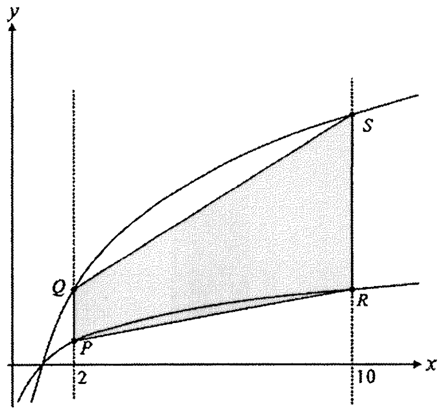
學科內容：對數

測驗目標：了解對數函數的圖形，並能操作基本運算。

試題解析：由題意可知 $P(2,\log 2)$，$Q(2,1)$， $R(10,1)$，$S(10,\log_2 10)$。

可知四邊形 $PQSR$ 為一梯形（如圖），其中一底

$\overline{PQ}=1-\log 2$，另一底 $\overline{RS}=\log_2 10-1$，高為 8。



所以梯形面積為 $(1-\log 2+\log_2 10-1)\times 8\times\dfrac{1}{2}$

$=4\times(\log_2 10-\log 2)\approx 4\times\left(\dfrac{1}{0.301}-0.301\right)\approx 12$

故答案為(3)

數學甲

試題編號：3

參考答案：(2)

學科內容：隨機的意義；機率的定義與性質

測驗目標：認識隨機變數與其相關性質，並能求出個別發生之機率。

試題解析：根據題意，p_1為抽出兩球中，較小號碼為 1 號的機率，依此類推，可知

$p_1=\frac{7}{C_2^8}=\frac{7}{28}=\frac{1}{4}$；$p_2=\frac{6}{C_2^8}=\frac{6}{28}=\frac{3}{14}$；$p_3=\frac{5}{C_2^8}=\frac{5}{28}$

…、$p_7=\frac{1}{28}$、$p_8=0$。其中p_1、p_2大於$\frac{1}{5}$，其餘皆小於$\frac{1}{5}$。

故答案為(2)

試題編號：4

參考答案：(2)

學科內容：機率的定義與性質；三階行列式

測驗目標：由奇偶性判定排列之條件據以求出特定事件之排列數，再依機率之性質求出機率。

試題解析：行列式值$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{vmatrix}$為$bcf+ade$兩項相加。此值非奇即偶，為奇數的情況發生在其中

一項為三奇數$1,3,5$連乘，另一項為三偶數$2,4,6$連乘。這種情況共有$2\times3!\times3!=72$種，

而樣本空間中的方陣共有$6!=720$種。故行列式值為奇數的機率為$\frac{1}{10}$。

故答案為(2)

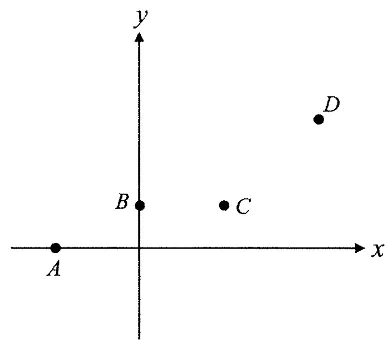
試題編號：5

參考答案：(3)(4)(5)

學科內容：多項式；直線與圓

測驗目標：直線、圓以及多項式函數圖形的基本概念

試題解析：在圖上繪出 A 、 B 、 C 、 D 四點（如圖）



選項(1)：因為 A 、 B 、 C 三點不共線，所以沒有一直線通過 A 、 B 、 C 三點。

選項(2)：因直線 AB 與直線 BD 斜率相同， A 、 B 、 D 三點共線，所以沒有一圓通過 A、B、D 三點。

選項(3)：因為 B 、 C 、 D 三點的 x 坐標都不相同，且此三點不共線，所以恰有一個二次多項式的圖形通過 B 、 C 、 D 三點。或利用插值多項式得

$$f(x)=f(0)\cdot\frac{(x-2)(x-4)}{(0-2)(0-4)}+f(2)\cdot\frac{x(x-4)}{(2-0)(2-4)}+f(4)\cdot\frac{x(x-2)}{(4-0)(4-2)}$$ ，得

$$f(x)=\frac{(x-2)(x-4)}{8}+1\cdot\frac{x(x-4)}{-4}+3\cdot\frac{x(x-2)}{8}$$ 。

選項(4)：【法一】

設三次多項式為 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 或

$f(x)=ax(x+2)(x-2)+bx(x-2)+c(x-2)+d$ ，將 $f(-2)=0$ 、 $f(0)=1$ 、 $f(2)=1$ 、 $f(4)=3$ 四點坐標代入，求得 $f(x)=\frac{1}{16}x^3-\frac{1}{8}x^2+1$ 。

【法二】

因為 A 、 B 、 C 、 D 四點的 x 坐標都不相同，且它們不共線，也不同在一個二次多項式的圖形上，過 A、B、C 三點的二次多項式圖形開口向下、而過 B 、 C 、 D 三點的二次多項式圖形開口向上，顯然不同。也可用插值法寫出圖形過 3 點的 2 次多項式、檢驗第 4 點不在圖形上。

選項(5)：因為 A 、 B 、 D 三點共線，過點 C 作一與該直線平行的直線，則此二平行直線的聯集包含 A 、 B 、 C 、 D 四點。

故答案為(3)(4)(5)

數學甲

試題編號：6

參考答案：(1)(2)(5)

學科內容：空間中的平面與直線

測驗目標：了解相異三平面若有兩個交點，則其交於一直線，以及係數行列式為 0 的相關概念。

試題解析：選項(1)：將(1,0,0)代入方程式，得其為 E_1 、 E_2 、 E_3 的一個交點。

選項(2)：由題設有一個交點的 z 坐標是 1，且 (1,0,0) 為另一個交點，故 E_1 、E_2 、E_3 有無窮多個交點。

選項(3)：三平面的法向量兩兩互相不平行，推得三平面相異。

選項(4)與選項(5)：由選項(2)可得係數行列式值 $\begin{vmatrix} c & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \\ 1 & 0 & c \end{vmatrix} = c^3+1$ 為 0，或利用高斯消去法，得 $c=-1$。將 $c=-1$ 代入原式，推得三平面交於一直線 $(t+1,t,t)$，故 E_1 、 E_2 、 E_3 會有一個交點的 z 坐標是 2。

故答案為(1)(2)(5)

數學甲

試題編號：7

參考答案：(2)(4)

學科內容：多項式方程式；數列的極限

測驗目標：多項式勘根定理、極限基本性質及導數定義。

試題解析：因 $f(1)\neq 0$，故 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}$ 不存在。根據勘根定理，

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-7	1	1	-1	1

所以 $f(x)=0$ 在 -2 與 -1 之間；在 0 與 1 之間；在 1 與 2 之間各有一實根，因此 $-2<a<-1<0<b<1<c<2$，得數列 $\langle a^n\rangle$ 、 $\langle c^n\rangle$ 發散，數列 $\langle b^n\rangle$ 收斂且極限 $\lim\limits_{n\to\infty} b^n=0$。

故答案為(2)(4)

試題編號：8

參考答案：(1)(2)

學科內容：三角函數的定義域、值域、週期性質與圖形；正餘弦函數的疊合

測驗目標：正餘弦函數的基本性質

試題解析：【法一】

選項(1)：$f(-x)=|-\sin x|+|\cos x|=|\sin x|+|\cos x|=f(x)$

選項(2)與選項(3)：當 x 為一、三象限角時，$\sin x$ 與 $\cos x$ 的正負號相同，得

$f(x)=\sqrt{2}|\sin(x+\frac{\pi}{4})|$；而當 x 為二、四象限角時，$\sin x$ 與 $\cos x$ 的正負號相異

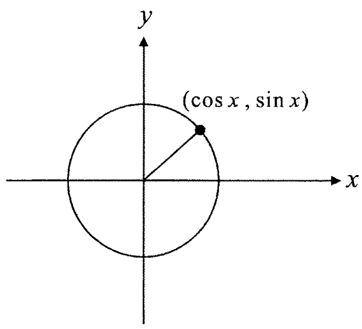
$f(x)=\sqrt{2}|\sin(x-\frac{\pi}{4})|$，可知 f 的最大值為 $\sqrt{2}$、最小值為 1。

選項(4)：當 $x\in[0,\ \frac{\pi}{2}]$ 時，$f(x)=|\sin x|+|\cos x|=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$，故在 $[0,\ \frac{\pi}{4}]$

$f(x)$ 的值為遞增，所以 $f(\frac{\pi}{9})>f(\frac{\pi}{10})$。

選項(5)：$f(x+\frac{\pi}{2})=|\cos x|+|\sin x|=f(x)$，$f$ 的(最小正)週期為 $\frac{\pi}{2}$。

【法二】$f(x)$ 表示以原點為圓心的單位圓上一點的 x、y 坐標絕對值之和(如圖)，當 x 由 0 增至 $\frac{\pi}{4}$ 時，$f(x)$ 之值由 1 增至 $\sqrt{2}$；而當 x 由 $\frac{\pi}{4}$ 增至 $\frac{\pi}{2}$ 時，$f(x)$ 之值由 $\sqrt{2}$ 減至 1；而後重複。



試題編號：9

參考答案：(1)(3)(5)

學科內容：空間向量

測驗目標：空間向量內積與外積概念。

試題解析：選項(1)：向量 $\overrightarrow{v}$ 在平面 $z=1$ 的單位圓上，與 z 軸正向單位向量 $(0,0,1)$ 的內積值恆為1，因此它們的夾角 θ 恆為 $45°$。

選項(2)：$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=ac+bd+0 \Rightarrow (\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v})^2 \le (a^2+b^2)(c^2+d^2)=1$，故 $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$ 的最大值是1，且最小值為 -1。

選項(3)：當 $\overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{v}$ 有最大夾角 θ 時，$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$ 有最小值 -1，由 $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|}=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}$，得 $\theta=135°$。

選項(4)：$(ad-bc)^2=(ad+(-b)c)^2 \le \left[a^2+(-b)^2\right]\left[c^2+d^2\right]=1$，因此 $(ad-bc)^2$ 的最大值是 1，故 $ad-bc$ 的值不可能是 $\dfrac{5}{4}$。

選項(5)：$|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}|$ 即 $\overrightarrow{u}$、$\overrightarrow{v}$ 所張平行四邊形面積，當兩向量垂直時得最大面積為 $|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|=\sqrt{2}$。或由 $|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}|^2=|(b,-a,ad-bc)|^2=1+(ad-bc)^2$，可得 $1\le|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}|\le\sqrt{2}$，且不等式的等號可成立；故 $|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}|$ 的最大、最小值分別是 $\sqrt{2}$、1。

數學甲

試題編號：A

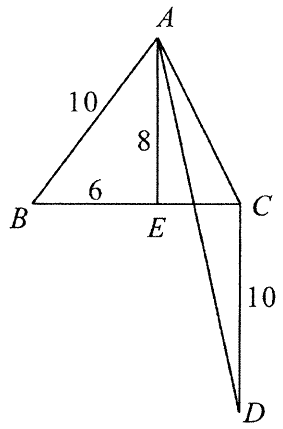
參考答案：$6\sqrt{5}$

學科內容：空間概念；餘弦定理

測驗目標：空間概念，三垂線定理；或餘弦定理。

試題解析：【法一】

由題意知 $\cos\angle ABC=\dfrac{3}{5}$。過 A 點做 $\overline{BC}$ 的垂線交 $\overline{BC}$ 於 E 點（如圖）。



所以 $\overline{AE}=\overline{AB}\sin\angle ABC=8$，

$\overline{EC}=\overline{BC}-\overline{BE}=10-\overline{AB}\cos\angle ABC=4$。

由畢氏定理可知

$\overline{AD}^2=\overline{AE}^2+\overline{EC}^2+\overline{CD}^2=8^2+4^2+10^2=180$。

所以 $\overline{AD}=\sqrt{180}=6\sqrt{5}$。

【法二】

可由餘弦定理求得

$\overline{AC}^2=10^2+10^2-2\times10\times10\times\cos\angle ABC=80$。

再由畢氏定理得到 $\overline{AD}^2=\overline{AC}^2+\overline{CD}^2=180$。

所以 $\overline{AD}=\sqrt{180}=6\sqrt{5}$。

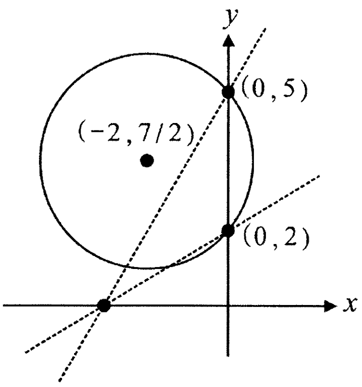
試題編號：B

參考答案：$\dfrac{2}{3}$、$\dfrac{5}{3}$

學科內容：圓與直線

測驗目標：直線與圓的關係

試題解析：已知直線 $y=m(x+3)$ 通過點 $(-3,0)$。圓方程式為 $(x+2)^2+\left(y-\dfrac{7}{2}\right)^2=\left(\dfrac{5}{2}\right)^2$。可知圓心在 $\left(-2,\dfrac{7}{2}\right)$，半徑為 $\dfrac{5}{2}$ 且交 y 軸於 $(0,2)$ 與 $(0,5)$ 兩點（如圖）。圓通過第一與第二象限，未通過第三與第四象限。若直線 $y=m(x+3)$ 與圓的兩個交點位在不同的象限，則此直線的 y 截距小於 5 且大於 2，所以 $\dfrac{2}{3}<m<\dfrac{5}{3}$。



試題編號：一

參考答案：(1) 略；(2) $\frac{4}{3}-t-\frac{t^3}{3}$ ；(3) $C=-4$ ；(4) $p(x)=4x^3+2x^2+2x$

學科內容：多項式函數的微積分

測驗目標：兩曲線所夾區域的面積，多項式函數的微分、積分，微積分基本定理等概念。

試題解析：（1）設 $p(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ ，由題設 $a_i\ge 0$ ，故當 $x\ge 1$ 時， $p(x)\ge 0$ 成立，

而 $-1-x^2<0$ ，故 $p(x)>-1-x^2$ 必成立。

（2）當 $t\ge 1$ 時， $\int_1^t(-1-x^2)dx=-x-\frac{x^3}{3}\Big|_{x=1}^{x=t}=\frac{4}{3}-t-\frac{t^3}{3}$ 。

（3）由題設及(1)可知，所圍成有界區域的面積為

$\int_1^t\left[p(x)+1+x^2\right]\mathrm{d}x=t^4+t^3+t^2+t+C$ ，

令 $t=1$ 得 $0=4+C$ ，故 $C=-4$ 。

（4）【解法一】

因為 $\int_1^t p(x)dx=\int_1^t(a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0)\,dx=\frac{a_n}{n+1}t^{n+1}+\cdots+a_0t-(\frac{a_n}{n+1}+\cdots+a_0)$ ，

由題設及(1)與(2)得知

$\frac{a_n}{n+1}t^{n+1}+\cdots+a_0t-(\frac{a_n}{n+1}+\cdots+a_0)-(\frac{4}{3}-t-\frac{t^3}{3})=t^4+t^3+t^2+t-4$ ，

故 $n=3$ ；也就是

$\frac{a_3}{4}t^4+\frac{a_2+1}{3}t^3+\frac{a_1}{2}t^2+(a_0+1)t-(\frac{a_3}{4}+\frac{a_2}{3}+\frac{a_1}{2}+a_0+\frac{4}{3})=t^4+t^3+t^2+t-4$ 。

比較係數得 $a_3=4$ 、 $a_2=2$ 、 $a_1=2$ 、 $a_0=0$ ，所以 $p(x)=4x^3+2x^2+2x$ 。

【解法二】

將所圍成區域的面積 $\int_1^t\left[p(x)+1+x^2\right]\mathrm{d}x=t^4+t^3+t^2+t+C$ 兩邊同時對變數 t 微分，由微積分基本定理得 $p(t)+1+t^2=4t^3+3t^2+2t+1$ ，

故 $p(x)=4x^3+2x^2+2x$ 。

數學甲

試題編號：二

參考答案：(1) $M=\begin{bmatrix}1 & -1\\ \sqrt{2} & \sqrt{2}\end{bmatrix}$；(2) 略；(3) $6\sqrt{2}$

學科內容：平面上的線性變換與二階方陣

測驗目標：線性變換的定義、性質、三角形面積、點到直線的距離。

試題解析：（1）設 $M=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$，由題設得知 $M\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ \sqrt{2}\end{bmatrix}$，因此解得 $\begin{cases}a=1\\ c=\sqrt{2}\end{cases}$；同理，

由 $M\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ \sqrt{2}\end{bmatrix}$，解得 $\begin{cases}b=-1\\ d=\sqrt{2}\end{cases}$；故 $M=\begin{bmatrix}1 & -1\\ \sqrt{2} & \sqrt{2}\end{bmatrix}$。

一般高中課本採用如上所述的行向量運算。如果採用列向量運算，對應的解法如下：

設 $M=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$，由題設得知 $\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}M=\begin{bmatrix}1 & \sqrt{2}\end{bmatrix}$，因此解得 $\begin{cases}a=1\\ b=\sqrt{2}\end{cases}$；同理，

由 $\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}M=\begin{bmatrix}-1 & \sqrt{2}\end{bmatrix}$，解得 $\begin{cases}c=-1\\ d=\sqrt{2}\end{cases}$；故 $M=\begin{bmatrix}1 & \sqrt{2}\\ -1 & \sqrt{2}\end{bmatrix}$。

（2）【解法一】

設 C 之坐標為 (a,b)，此處 $a+b\neq 1$，則由 $M=\begin{bmatrix}1 & -1\\ \sqrt{2} & \sqrt{2}\end{bmatrix}$ 得知 C' 之坐標為 $(a-b,\sqrt{2}a+\sqrt{2}b)$。$\Delta ABC$ 的重心 G 之坐標為三頂點坐標的平均，也就是 $(\frac{1+a}{3},\frac{1+b}{3})$；同理，$\Delta A'B'C'$ 的重心 G' 之坐標為三頂點坐標的平均，也就是 $(\frac{a-b}{3},\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{2}a+\sqrt{2}b}{3})$。又由矩陣乘法得

$$\begin{bmatrix}1 & -1\\ \sqrt{2} & \sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1+a}{3}\\ \frac{1+b}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1+a}{3}-\frac{1+b}{3}\\ \sqrt{2}\cdot\frac{1+a}{3}+\sqrt{2}\cdot\frac{1+b}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{a-b}{3}\\ \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{2}a+\sqrt{2}b}{3}\end{bmatrix},$$

所以 M 將 ΔABC 的重心 G 映射至 $\Delta A'B'C'$ 的重心 G'。

數學甲

【解法二】

設 O 為原點，ΔABC 的重心為 G，$\Delta A'B'C'$ 的重心為 G'，因為 M 是個線性變換，所以

$$M(\overrightarrow{OG}) = M\left[\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\right]$$

$$=\frac{1}{3}[M(\overrightarrow{OA})+M(\overrightarrow{OB})+M(\overrightarrow{OC}]$$

$$=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}'+\overrightarrow{OB}'+\overrightarrow{OC}')=\overrightarrow{OG}'。$$

（3）【解法一】

設滿足條件的 C 點坐標為 (a,b)，依題意 (a,b) 到直線 AB 的距離為 $\dfrac{\Delta ABC\text{ 面積}\times 2}{\overline{AB}}=\dfrac{3\times 2}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$，由 $A(1,0)$ 及 $B(0,1)$ 坐標，可知過 AB 兩點的直線方程式為 $x+y-1=0$，利用點到直線的距離公式得知 $\dfrac{|a+b-1|}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$，也就是 $|a+b-1|=6$。C 經 M 映射後為 $C'(a-b,\sqrt{2}a+\sqrt{2}b)$，由 $A'(1,\sqrt{2})$ 及 $B'(-1,\sqrt{2})$ 坐標，可知過 A'、B' 兩點的直線方程式為 $y-\sqrt{2}=0$，故 C' 與直線 $A'B'$ 的距離為 $\dfrac{|\sqrt{2}a+\sqrt{2}b-\sqrt{2}|}{1}=\sqrt{2}|a+b-1|=6\sqrt{2}$。

【解法二】

因為 ΔABC 的面積為 3，所以 $\Delta A'B'C'$ 的面積為 $|\det M|\cdot 3=6\sqrt{2}$，而 $\overline{A'B'}=2$，所以 C' 與直線 $A'B'$ 的距離為 $\dfrac{\Delta A'B'C'\text{面積}\times 2}{\overline{A'B'}}=\dfrac{6\sqrt{2}\times 2}{2}=6\sqrt{2}$。

數學甲