

大學入學考試中心
102 學年度指定科目考試試題
數學乙

—作答注意事項—

考試時間：80 分鐘

作答方式：• 選擇（填）題用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。

- 非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答案卷」上作答；更正時，可以使用修正液（帶）。
- 未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案；或未使用黑色墨水的筆書寫答案卷，致評閱人員無法辨認機器掃描後之答案者，其後果由考生自行承擔。
- 答案卷每人一張，不得要求增補。

選填題作答說明：選填題的題號是 A, B, C, ……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{18}}{\textcircled{19}}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$ ，則考生

必須分別在答案卡上的第 18 列的 \square^3 與第 19 列的 \square^8 畫記，如：

18	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
19	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 \square^- 與第 21 列的 \square^7 畫記，如：

20	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
21	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題共占 76 分）

一、單選題（占 12 分）

說明：第1題至第2題，每題有5個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得6分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 設 a, b, c 為實數，且二次多項式 $f(x) = ax(x-1) + bx(x-3) + c(x-1)(x-3)$ 滿足 $f(0) = 6$ 、 $f(1) = 2$ 、 $f(3) = -2$ 。請問 $a+b+c$ 等於下列哪一個選項？
 (1) 0 (2) $\frac{2}{3}$ (3) 1 (4) $-\frac{1}{2}$ (5) $-\frac{4}{3}$
2. 綜合數種糧食的【糧食自給率】定義為 $\frac{A}{B}$ ，其中 A 為「每一種糧食之國內生產量乘以該糧食每單位產生熱量之後的總和」， B 為「每一種糧食之國內消費量乘以該糧食每單位產生熱量之後的總和」。已知甲、乙、丙三種糧食相關數據如下表：

糧食	國內生產量 (單位：千公噸)	國內消費量 (單位：千公噸)	單位糧食產生的熱量 (單位：大卡／每百公克)
甲	1000	1200	300
乙	280	320	100
丙	100	1000	600

- 請問綜合甲、乙、丙這三種糧食的【糧食自給率】最接近下列哪一個選項？
 (1) 37% (2) 39% (3) 41% (4) 43% (5) 45%

二、多選題（占 40 分）

說明：第3題至第7題，每題有5個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得8分；答錯1個選項者，得4.8分；答錯2個選項者，得1.6分；答錯多於2個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

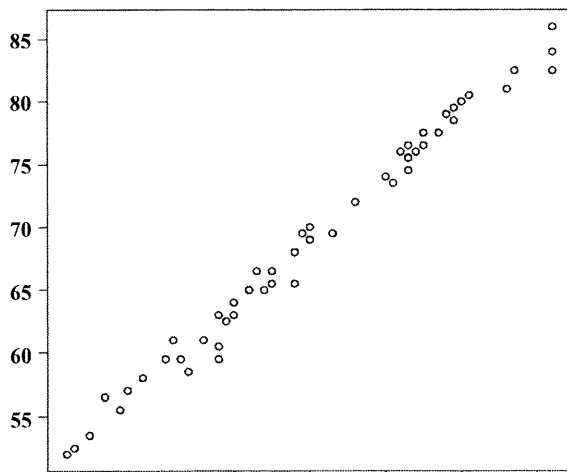
3. 坐標平面上兩點 $(4,1)$ 和 $(5,9)$ 在直線 $3x - y - k = 0$ 的兩側，其中 k 為整數。請選出正確的選項。
- (1) 滿足上式的 k 最少有 5 個
 - (2) 所有滿足上式的 k 的總和是 35
 - (3) 所有滿足上式的 k 中，最小的是 7
 - (4) 所有滿足上式的 k 的平均是 9
 - (5) 所有滿足上式的 k 中，奇數與偶數的個數相同
4. 下列有關循環小數的敘述中，請選出正確的選項。
- (1) $0.\overline{7} + 0.\overline{3} = 0.\overline{6} + 0.\overline{4}$
 - (2) $0.\overline{72} + 0.\overline{28} = 1.\overline{1}$
 - (3) $0.\overline{7} + 0.\overline{3} = 1$
 - (4) $0.\overline{5} + 0.\overline{5} = 1.\overline{1}$
 - (5) $0.\overline{49} = 0.5$

5. 某研究所處理個人申請入學，其甄選總成績係採計測驗 A 分數及測驗 B 分數各占 50%。50 位申請同學依甄選總成績高低排序，錄取前 20 名。現依准考證號碼順序，將這些同學的成績列表如下：(例如，第一位同學的測驗 A 分數及測驗 B 分數分別為 93 分及 28 分)

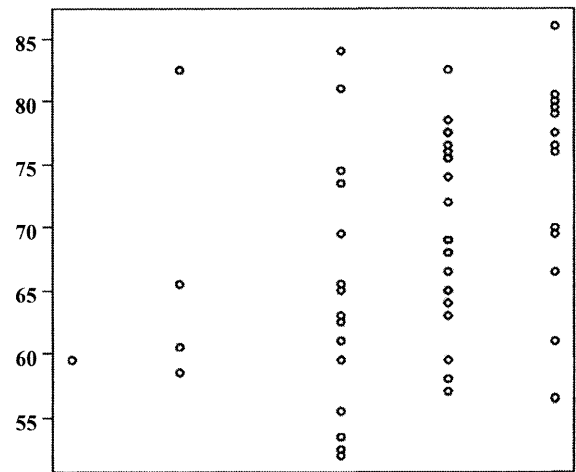
測驗 A	93	98	100	100	100	98	96	96	98	96	96	98	98
測驗 B	28	50	59	22	52	67	30	15	46	11	72	21	59
測驗 A	93	100	100	100	100	98	98	96	98	100	96	100	96
測驗 B	24	13	53	33	61	57	55	26	35	40	9	60	23
測驗 A	96	96	96	100	100	96	98	98	91	100	96	100	98
測驗 B	66	29	34	58	55	35	16	28	28	72	51	39	40
測驗 A	98	96	96	93	98	96	98	98	98	98	93		
測驗 B	18	43	8	38	32	53	38	53	30	54	72		

所有學生測驗 A 分數的平均數為 97.38，而測驗 B 分數的平均數為 40.22。現從甄選總成績、測驗 A 分數及測驗 B 分數之中任選兩種成績作散佈圖，圖甲及圖乙為其中之二；兩圖中各有 50 個資料點，每一點代表一位同學；兩個橫軸與縱軸之單位長可能皆不相同。請選出正確的選項。

- (1) 圖乙的橫軸為測驗 A 分數
- (2) 圖乙的縱軸為甄選總成績
- (3) 圖甲的橫軸為甄選總成績
- (4) 若只以測驗 B 分數高低錄取 20 位同學（不採計測驗 A 分數），錄取的同學與以甄選總成績高低錄取的同學完全相同
- (5) 甄選總成績的平均數為 97.38 及 40.22 的平均數



圖甲



圖乙

6. 想要了解選民對某候選人真正的支持度(支持率) p ，四家媒體所做的民意調查結果如下表所示：

	媒體A	媒體B	媒體C	媒體D
\hat{p}	0.30	0.40	0.30	0.28
$\hat{\sigma}$	0.02	$\hat{\sigma}_B$	0.01	0.01

其中 \hat{p} 表示抽樣支持度， $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ ， n 為抽樣人數。請選出正確的選項。

- (1) 在 95% 的信心水準之下，媒體 A 抽樣所得 p 的信賴區間為 $[0.28, 0.32]$
- (2) 如果媒體 B 抽樣的人數與媒體 A 相同，則 $\hat{\sigma}_B$ 大於 0.02
- (3) 媒體 C 抽樣人數約為媒體 A 抽樣人數的兩倍
- (4) 媒體 A 的抽樣支持度比媒體 B 的抽樣支持度更接近候選人真正的支持度 p
- (5) 在 95% 的信心水準之下，至少有一家媒體抽樣所得 p 的信賴區間會包含真正的支持度 p

7. 已知二階方陣 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 滿足 $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ ， $A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$ 。請選出正確的選項。

- (1) A 的行列式(值)為 6
- (2) $A^2 = 5A - 6 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- (3) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$
- (4) $A \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix}$
- (5) $[1 \ 1]A = [5 \ 7]$

三、選填題（占 24 分）

說明：1.第 A 至 C 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號（8-14）。

2.每題完全答對給 8 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 從玫瑰、菊花、杜鵑、蘭花、山茶、水仙、繡球等七盆花中選出四盆靠在牆邊排成一列，其中杜鵑及山茶都被選到，且此兩盆花位置相鄰的排法有 ⑧⑨⑩ 種。

B. 袋中有 3 顆白球與 1 顆黑球，每次隨機從袋中抽出 1 球，袋中每一球被抽到的機率皆相同，抽出後不放回，直到抽中黑球時遊戲結束。若在第 k 次抽到黑球，則得到 k 元獎金。此遊戲可獲得獎金的數學期望值為 $\frac{⑪}{⑫}$ 元（化為最簡分數）。

C. 在坐標平面上，設 O 為原點，向量 $\vec{a} = (1, 2)$ ， $\vec{b} = (2, 1)$ ， $\vec{c} = (1, 1)$ ， $\vec{d} = (-1, 1)$ 。 P 為平面上的動點，令點集合 $A = \{P \mid \vec{OP} = x\vec{a} + y\vec{b} \text{ 且 } 0 \leq x \leq 1 \text{ 且 } 0 \leq y \leq 1\}$ ，點集合 $B = \{P \mid \vec{OP} = x\vec{c} + y\vec{d} \text{ 且 } 0 \leq x \leq 1 \text{ 且 } 0 \leq y \leq 1\}$ ，則區域 $A \cap B$ 的面積為 $\frac{⑬}{⑭}$ （化為最簡分數）。

——— 以下第貳部分的非選擇題，必須作答於答案卷 ———

第貳部分：非選擇題（占 24 分）

說明：本部分共有二大題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明大題號(一、二)與子題號((1)、(2)、……)，同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至零分。作答務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。每一子題配分標於題末。

一、已知 $\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$ 。

- (1) 請以對數律計算 $\log 1.5$ （不必四捨五入）。（3 分）
- (2) 請以對數律計算 $\log (1.5)^{60}$ （不必四捨五入）。（3 分）
- (3) 請問 $(1.5)^{60}$ 的整數部分是幾位數？請說明理由。（3 分）
- (4) 請問 $(1.5)^{60}$ 的整數部分中，最左邊的數字是幾？請說明理由。（3 分）

二、某工廠使用三種貴金屬元素合成兩種合金，其中每單位的甲合金是由 5 公克的 A 金屬、3 公克的 B 金屬以及 3 公克的 C 金屬組成，而每單位的乙合金是由 3 公克的 A 金屬、6 公克的 B 金屬與 3 公克的 C 金屬所組成。已知甲、乙合金每單位的獲利分別為 600、700 元。若工廠此次進了 1000 公克的 A 金屬、1020 公克的 B 金屬與 660 公克的 C 金屬投入生產這兩種合金，試問甲、乙兩種合金各應生產多少單位，才能獲得最大利潤？又此時利潤為多少？（12 分）

數學乙試題解析

試題編號：1

參考答案：(2)

學科內容：多項式的運算與應用

測驗目標：插值多項式的概念

試題解析：【解法一】

$$x=0 \text{ 代入，得 } f(0)=c(0-1)(0-3)=6, c=2$$

$$x=1 \text{ 代入，得 } f(1)=b \times 1 \times (1-3)=2, b=-1$$

$$x=3 \text{ 代入，得 } f(3)=a \times 3 \times (3-1)=-2, a=-\frac{1}{3}$$

【解法二】

可直接利用拉格朗日插值多項式得知

$$f(x) = f(3) \frac{(x-0)(x-1)}{(3-0)(3-1)} + f(1) \frac{(x-0)(x-3)}{(1-0)(1-3)} + f(0) \frac{(x-1)(x-3)}{(0-1)(0-3)}$$

$$= -\frac{1}{3}x(x-1) - x(x-3) + 2(x-1)(x-3)$$

$$\text{得 } a = -\frac{1}{3}, b = -1, c = 2$$

$$\text{故 } a+b+c = \frac{2}{3}, \text{ 答案為選項(2)。}$$

試題編號：2

參考答案：(2)

學科內容：一維數據分析

測驗目標：閱讀瞭解題意，並進行數據分析

試題解析：1. 依題目所述，【糧食自給率】定義為

$$\frac{A}{B} = \frac{\text{每一種糧食之國內生產量乘以該糧食每單位產生熱量之後的總和}}{\text{每一種糧食之國內消費量乘以該糧食每單位產生熱量之後的總和}}$$

$$\text{其中， } A = 1000 \times 300 + 280 \times 100 + 100 \times 600 = 388000$$

$$B = 1200 \times 300 + 320 \times 100 + 1000 \times 600 = 992000。$$

$$2. \text{ 綜合此三種糧食的【糧食自給率】為 } \frac{A}{B} = \frac{388000}{992000} \approx 0.3911, \text{ 最接近 } 39\%。$$

故答案為選項(2)。

試題編號：3

參考答案：(3)(5)

學科內容：直線方程式及其圖形

測驗目標：平面上的直線方程式的性質

試題解析：1. 因坐標平面上兩點 (4,1) 和 (5,9) 在直線 $3x - y - k = 0$ 的兩側，即將 $x = 4, y = 1$ 與 $x = 5, y = 9$ 分別代入 $3x - y - k$ 時，所得之兩數的符號應相異，故得不等式 $(11 - k)(6 - k) < 0$ ，解得 $6 < k < 11$

2. 又 k 為整數，故 k 的所有解為 7, 8, 9, 10

選項(1)： k 只有 4 個解。

選項(2)： $7 + 8 + 9 + 10 = 34$

選項(3)： k 的最小值為 7

選項(4)：滿足上式的 k 的平均為 $\frac{7+8+9+10}{4} = 8.5$

選項(5)：奇數為 7、9；偶數為 8、10，故奇數與偶數的個數相同。

故答案為選項(3)(5)。

試題編號：4

參考答案：(1)(4)(5)

學科內容：循環小數

測驗目標：循環小數的加法運算

試題解析：選項(1)： $0.\bar{7} + 0.\bar{3} = \frac{7}{9} + \frac{3}{9} = \frac{10}{9}$ ， $0.\bar{6} + 0.\bar{4} = \frac{6}{9} + \frac{4}{9} = \frac{10}{9}$

選項(2)： $0.\overline{72} + 0.\overline{28} = \frac{72}{99} + \frac{28}{99} = \frac{100}{99}$ ， $1.\bar{1} = \frac{10}{9}$

選項(3)： $0.\bar{7} + 0.\bar{3} = \frac{7}{9} + \frac{3}{9} = \frac{10}{9} \neq 1$

選項(4)： $0.\bar{5} + 0.\bar{5} = \frac{5}{9} + \frac{5}{9} = \frac{10}{9} = 1.\bar{1}$

選項(5)： $0.\overline{49} = \frac{49 - 4}{90} = \frac{45}{90} = \frac{1}{2} = 0.5$

故答案為選項(1)(4)(5)。

試題編號：5

參考答案：(1)(2)(4)(5)

學科內容：二維數據分析

測驗目標：由原始數據資料進行二維數據分析與判讀散佈圖

試題解析：選項(1)至選項(3)：

1. 觀察圖乙可知其橫坐標代表的分數只有 5 種不同的成績，而由成績之列表可知其為測驗 A 分數。
2. 由於圖甲與圖乙的縱坐標分數範圍介於 50 分至 90 分之間，可知不是測驗 A 分數，也不是測驗 B 分數，故必為甄選總成績。
3. 圖甲的橫坐標不是甄選總成績，也不是測驗 A 分數，故必為測驗 B 分數；也可觀察圖甲的橫坐標代表的成績恰有 3 人得到最高分，對照表中資料也恰有 3 人得到測驗 B 分數的最高分 72 分。

選項(4)：在圖甲中，最上方的 20 個點，代表甄選總成績的前 20 名。而剛好它們又是最右邊的 20 個點，代表測驗 B 分數的前 20 名。

選項(5)：因採計甄選總成績時，測驗 A 分數與測驗 B 分數各占 50%，所以甄選總成績的平均就是測驗 A 分數平均與測驗 B 分數平均的平均數。

故答案為選項(1)(2)(4)(5)。

試題編號：6

參考答案：(2)

學科內容：抽樣與統計推論

測驗目標：了解抽樣所得之信賴區間，並判斷抽樣支持度與實際支持度的差別

試題解析：選項(1)：在 95% 的信心水準下，媒體 A 抽樣所得之 p 信賴區間應為

$$[\hat{p} - 2\hat{\sigma}, \hat{p} + 2\hat{\sigma}] = [0.30 - 2 \times 0.02, 0.30 + 2 \times 0.02] = [0.26, 0.34]。$$

選項(2)：【解法一】

根據題目所給的抽樣標準差公式 $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ ，若 n 值相同，則當

\hat{p} 愈靠近 0.5 時，所得的 $\hat{\sigma}$ 會愈大。因 \hat{p}_B 較 \hat{p}_A 靠近 0.5，且 $\hat{\sigma}_A = 0.02$ ，

故 $\hat{\sigma}_B$ 大於 0.02

【解法二】

直接代值，將 $\hat{p}_A = 0.30$ ， $\hat{\sigma}_A = 0.02$ ， $\hat{p}_B = 0.40$ ，代入 $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ 中，

$$\text{得 } \hat{\sigma}_A = \sqrt{\frac{0.3 \times 0.7}{n}} < \sqrt{\frac{0.4 \times 0.6}{n}} = \hat{\sigma}_B$$

選項(3)：若 \hat{p} 值相同，則 $\hat{\sigma}$ 與 \sqrt{n} 成反比，即 $\hat{\sigma}_A : \hat{\sigma}_C = \frac{1}{\sqrt{n_A}} : \frac{1}{\sqrt{n_C}}$ ，得知

$$n_C = \left(\frac{\hat{\sigma}_A}{\hat{\sigma}_C}\right)^2 \cdot n_A。故媒體 C 的抽樣人數約為媒體 A 的 4 倍。$$

選項(4)與選項(5)：任何抽樣的結果，都不能判定實際狀況為何。

故答案為選項(2)。

試題編號：7

參考答案：(1)(2)(4)

學科內容：矩陣的運算

測驗目標：能操作矩陣乘法與反方陣

試題解析：由題意知矩陣 A 滿足 $A \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ 。因 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 為二階可逆方陣，

$$\text{故解得 } A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

選項(1)： A 的行列式(值)為 $3 \times 2 = 6$

$$\text{選項(2)：} A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, 5A - 6 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 10 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 0 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\text{故 } A^2 = 5A - 6 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{選項(3)：} A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\text{選項(4)：} A \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\text{選項(5)：} [1 \ 1]A = [1 \ 1] \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = [3 \ 4]$$

故答案為選項(1)(2)(4)。

試題編號：A

參考答案：120

學科內容：排列、組合

測驗目標：排列組合概念

試題解析：先從其他五盆花中選出兩盆來，然後視為三相異物的排列，最後再考慮杜鵑及山茶可以互換的排列，可列式計算得 $C_2^5 \cdot 3! \cdot 2! = 120$ 種排法。

試題編號：B

參考答案： $\frac{5}{2}$

學科內容：期望值

測驗目標：評量隨機變數之期望值

試題解析：設隨機變數 X 代表所獲獎金的金額

依題意可知得 1 元獎金的機率為 $P(X=1) = \frac{1}{4}$ ；依此類推， $P(X=2) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$ ，

$$P(X=3) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \quad P(X=4) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{4},$$

故 X 的期望值為 $E(X) = 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$ (元)。

試題編號：C

參考答案： $\frac{1}{3}$

學科內容：平面向量線性組合、面積公式與二階行列式

測驗目標：描繪向量組合的區域，並求平面區域的面積

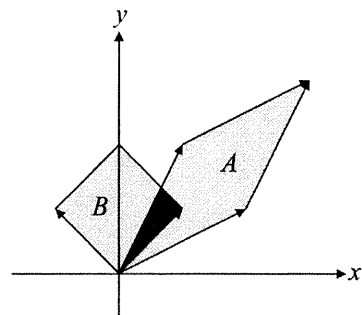
試題解析：1. 先考慮點集合 A 的圖形。

已知 $\vec{OP} = x \vec{a} + y \vec{b}$ ，其中 $0 \leq x \leq 1$ ， $0 \leq y \leq 1$ 。

令 $\vec{a}' = x \vec{a}$ ， $\vec{b}' = y \vec{b}$ ，因 $0 \leq x \leq 1$ ，所以點 a' 必落在 \vec{a} 上。同理，因 $0 \leq y \leq 1$ ，點 b' 必落在 \vec{b} 上。

又 $\vec{OP} = x \vec{a} + y \vec{b} = \vec{a}' + \vec{b}'$ ，

故區域 A 即以 $(0,0), (1,2), (3,3), (2,1)$ 等四點為頂點的平行四邊形。



2. 同理，區域 B 是以 $(0,0), (1,1), (0,2), (-1,1)$ 等四點為頂點的平行四邊形。
 3. 由圖可知，區域 $A \cap B$ 是一個三角形區域，其中兩頂點已知為 $(0,0), (1,1)$ ；

第三頂點為直線 $y=2x$ 與 $x+y=2$ 的交點 $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ 。故區域 $A \cap B$ 的面積為

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{3} - \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{3}$$

試題編號：一

參考答案：(1) $\log 1.5 \approx 0.1761$ ；(2) $\log(1.5)^{60} \approx 10.566$ ；(3) 11 位數；(4) 3

學科內容：指數、對數函數

測驗目標：了解對數律、首數與尾數的意義

試題解析：(1) $\log 1.5 = \log \frac{3}{2} = \log 3 - \log 2 \approx 0.4771 - 0.3010 = 0.1761$

$$(2) \log(1.5)^{60} = 60 \times \log 1.5 \approx 60 \times 0.1761 = 10.566$$

(3) 由(2)可知， $\log(1.5)^{60}$ 的首數為 10，這時 $10 \leq \log(1.5)^{60} < 11$ ，因此

$10^{10} \leq (1.5)^{60} < 10^{11}$ ，表示 $(1.5)^{60}$ 的整數部分是 $10+1=11$ 位數。

(4) 由(2)可知， $\log(1.5)^{60}$ 的尾數為 0.566，而 $\log 3 \approx 0.4771 < 0.566 < 0.6020 \approx \log 4$ ，

得 $10 + \log 3 < 10.566 < 10 + \log 4$ ，即 $\log 10^{10} + \log 3 < \log(1.5)^{60} < \log 10^{10} + \log 4$ ，

亦即 $\log(3 \times 10^{10}) < \log(1.5)^{60} < \log(4 \times 10^{10})$ ，得 $3 \times 10^{10} < (1.5)^{60} < 4 \times 10^{10}$ ，

所以 $(1.5)^{60}$ 的整數部分中，最左邊的數字是 3。

試題編號：二

參考答案：甲合金 100 單位與乙合金 120 單位；最大利潤 144000 元。

學科內容：線性規劃

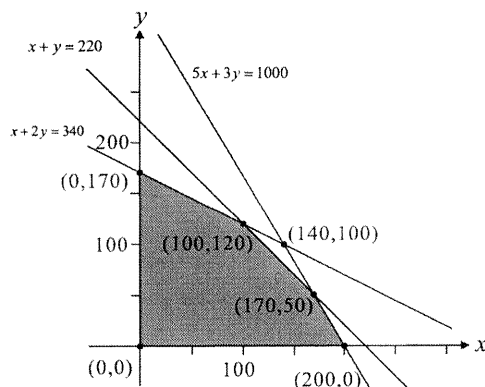
測驗目標：利用線性規劃解題

試題解析：設工廠生產甲合金 x 單位、乙合金 y 單位。

$$1. \text{ 由題意知 } x, y \text{ 需滿足下列聯立不等式：} \begin{cases} x, y \geq 0 \\ 5x + 3y \leq 1000 \\ 3x + 6y \leq 1020 \\ 3x + 3y \leq 660 \end{cases}$$

2. 求出頂點或畫出可行解區域

由聯立不等式可繪出此可行解區域如下圖的灰色區域(含邊界)。其頂點為 $(0, 0)$ 、 $(200, 0)$ 、 $(170, 50)$ 、 $(100, 120)$ 、 $(0, 170)$ 。



3. 求出目標函數

由「甲、乙合金每單位的獲利分別為 600、700 元」得目標函數為

$$f(x, y) = 600x + 700y。$$

4. 說明工廠應生產甲合金 100 單位、乙合金 120 單位，才能獲得最大利潤 144000 元。

【解法一】

將可行解區域上的各頂點代入目標函數，可得：

(x, y)	$(0, 0)$	$(200, 0)$	$(170, 50)$	$(100, 120)$	$(0, 170)$
$600x + 700y$	0	120000	137000	144000	119000

比較大小可知：工廠應生產甲合金 100 單位與乙合金 120 單位，才有最大利潤 144000 元。

【解法二】

畫出正確的可行解區域（標示邊界、頂點 $(0,0)$ 、 $(200,0)$ 、 $(170,50)$ 、 $(100,120)$ 、 $(0,170)$ 所圍區域）。由於 $f(x,y) = 600x + 700y$ 所定直線之斜率為 $-\frac{6}{7}$ ，當直線 $600x + 700y = k$ 在可行解區域平行移動時，因目標函數所定直線之斜率 $-\frac{6}{7}$ 介於 -1 與 $-\frac{1}{2}$ 之間，故得知在 $x=100, y=120$ 時，可得最大利潤 144000 元。