大學入學考試中心
103 學年度學科能力測驗試題
數學考科

—作答注意事項—

考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 6 題，多選題 6 題，選填題第 A 至 H 題共 8 題

作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液(帶)。未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，其後果由考生自行承擔。

選填題作答說明：選填題的題號是 A，B，C，……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\dfrac{⑱}{⑲}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\dfrac{3}{8}$，則考生必須分別在答案卡上的第 18 列的 $\underset{\square}{3}$ 與第 19 列的 $\underset{\square}{8}$ 畫記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
18	□	□	■	□	□	□	□	□	□	□	□	□
19	□	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□

例：若第 C 題的答案格式是 $\dfrac{⑳㉑}{50}$ ，而答案是 $\dfrac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 $\underset{\square}{-}$ 與第 21 列的 $\underset{\square}{7}$ 畫記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
20	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	■	□
21	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□	□

※試題後附有參考公式及可能用到的數值

第壹部分：選擇題（占 60 分）

一、單選題（占 30 分）

說明：第1題至第6題，每題有5個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得5分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 請問下列哪一個選項等於 $\log\left(2^{(3^5)}\right)$？

(1) $5\log\left(2^3\right)$

(2) $3\times5\log2$

(3) $5\log2\times\log3$

(4) $5(\log2+\log3)$

(5) $3^5\log2$

2. 令 $A(5,0,12)$、$B(-5,0,12)$ 為坐標空間中之兩點，且令 P 為 xy 平面上滿足 $\overline{PA}=\overline{PB}=13$ 的點。請問下列哪一個選項中的點可能為 P？

(1) $(5,0,0)$

(2) $(5,5,0)$

(3) $(0,12,0)$

(4) $(0,0,0)$

(5) $(0,0,24)$

3. 在坐標平面上，以 $(1,1),(-1,1),(-1,-1)$ 及 $(1,-1)$ 等四個點為頂點的正方形，與圓 $x^2+y^2+2x+2y+1=0$ 有幾個交點？

(1) 1個

(2) 2個

(3) 3個

(4) 4個

(5) 0個

4. 請問滿足絕對值不等式 $|4x-12| \le 2x$ 的實數 x 所形成的區間，其長度為下列哪一個選項？

(1) 1

(2) 2

(3) 3

(4) 4

(5) 6

5. 設 $(1+\sqrt{2})^6 = a + b\sqrt{2}$，其中 a,b 為整數。請問 b 等於下列哪一個選項？

(1) $C_0^6 + 2C_2^6 + 2^2C_4^6 + 2^3C_6^6$

(2) $C_1^6 + 2C_3^6 + 2^2C_5^6$

(3) $C_0^6 + 2C_1^6 + 2^2C_2^6 + 2^3C_3^6 + 2^4C_4^6 + 2^5C_5^6 + 2^6C_6^6$

(4) $2C_1^6 + 2^2C_3^6 + 2^3C_5^6$

(5) $C_0^6 + 2^2C_2^6 + 2^4C_4^6 + 2^6C_6^6$

6. 某疾病可分為兩種類型：第一類占 70%，可藉由藥物 A 治療，其每一次療程的成功率為 70%，且每一次療程的成功與否互相獨立；其餘為第二類，藥物 A 治療方式完全無效。在不知道患者所患此疾病的類型，且用藥物 A 第一次療程失敗的情況下，進行第二次療程成功的條件機率最接近下列哪一個選項？

(1) 0.25

(2) 0.3

(3) 0.35

(4) 0.4

(5) 0.45

數學考科

二、多選題（占 30 分）

說明：第7題至第12題，每題有5個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得5分；答錯1個選項者，得3分；答錯2個選項者，得1分；答錯多於2個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

7. 設坐標平面上，x 坐標與 y 坐標皆為整數的點稱為格子點。請選出圖形上有格子點的選項。

(1) $y=x^2$

(2) $3y=9x+1$

(3) $y^2=-x-2$

(4) $x^2+y^2=3$

(5) $y=\log_9 x+\frac{1}{2}$

8. 關於下列不等式，請選出正確的選項。

(1) $\sqrt{13}>3.5$

(2) $\sqrt{13}<3.6$

(3) $\sqrt{13}-\sqrt{3}>\sqrt{10}$

(4) $\sqrt{13}+\sqrt{3}>\sqrt{16}$

(5) $\frac{1}{\sqrt{13}-\sqrt{3}}>0.6$

9. 一物體由坐標平面中的點 $(-3,6)$ 出發，沿著向量所指的方向持續前進，可以進入第一象限。請選出正確的選項。

(1) $=(1,-2)$

(2) $=(1,-1)$

(3) $=(0.001,0)$

(4) $=(0.001,1)$

(5) $=(-0.001,1)$

10.設 $f(x)$ 為實係數二次多項式，且已知 $f(1)>0$、 $f(2)<0$、 $f(3)>0$。令 $g(x)=f(x)+(x-2)(x-3)$，請選出正確的選項。

(1) $y=f(x)$ 的圖形是開口向下的拋物線

(2) $y=g(x)$ 的圖形是開口向下的拋物線

(3) $g(1)>f(1)$

(4) $g(x)=0$ 在1與2之間恰有一個實根

(5) 若 α 為 $f(x)=0$ 的最大實根，則 $g(\alpha)>0$

11.設 $a_1=1$ 且 $a_1,a_2,a_3,\ldots$ 為等差數列。請選出正確的選項。

(1) 若 $a_{100}>0$，則 $a_{1000}>0$

(2) 若 $a_{100}<0$，則 $a_{1000}<0$

(3) 若 $a_{1000}>0$，則 $a_{100}>0$

(4) 若 $a_{1000}<0$，則 $a_{100}<0$

(5) $a_{1000}-a_{10}=10(a_{100}-a_1)$

12.所謂某個年齡範圍的失業率，是指該年齡範圍的失業人數與勞動力人數之比，以百分數表達（進行統計分析時，所有年齡以整數表示）。下表為去年某國四個年齡範圍的失業率，<u>其中的年齡範圍有所重疊</u>。

年齡範圍	35~44 歲	35~39 歲	40~44 歲	45~49 歲
失業率	12.66(%)	9.80(%)	13.17(%)	7.08(%)

請根據上表選出正確的選項。

(1) 在上述四個年齡範圍中，以40~44歲的失業率為最高

(2) 40~44歲勞動力人數多於45~49歲勞動力人數

(3) 40~49歲的失業率等於 $\left(\frac{13.17+7.08}{2}\right)\%$

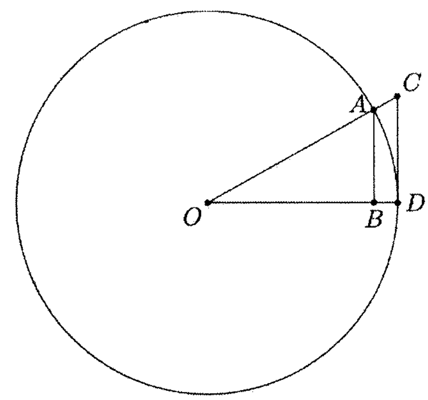
(4) 35~39歲勞動力人數少於40~44歲勞動力人數

(5) 如果40~44歲的失業率降低，則45~49歲的失業率會升高

第貳部分：選填題（占 40 分）

說明：1.第A至H題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號（13–36）。
2.每題完全答對給5分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 設圓 O 之半徑為 24，$\overline{OC}=26$，$\overline{OC}$ 交圓 O 於 A 點，$\overline{CD}$ 切圓 O 於 D 點，B 為 A 點到 $\overline{OD}$ 的垂足，如右邊的示意圖。則 $\overline{AB}=\dfrac{⑬⑭⑮}{⑯⑰}$。(化為最簡分數)



B. 坐標平面上，若直線 $y=ax+b$（其中 a,b 為實數）與二次函數 $y=x^2$ 的圖形恰交於一點，亦與二次函數 $y=(x-2)^2+12$ 的圖形恰交於一點，則 $a=$ ⑱，$b=$ ⑲⑳。

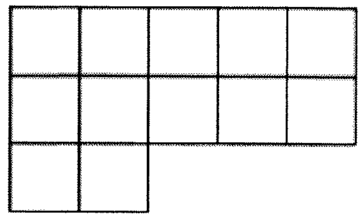
C. 小鎮 A 距離一筆直道路 6 公里，並與道路上的小鎮 B 相距 12 公里。今欲在此道路上蓋一家超級市場使其與 A, B 等距，則此超級市場與 A 的距離須為 ㉑$\sqrt{㉒}$ 公里。(化為最簡根式)

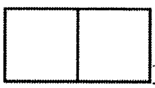
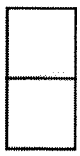
D. 坐標空間中有四點 $A(2,0,0)$、$B(3,4,2)$、$C(-2,4,0)$ 與 $D(-1,3,1)$。若點 P 在直線 CD 上變動，則內積 $\cdot$ 之最小可能值為 $\dfrac{㉓}{㉔}$。(化為最簡分數)

E. 設 $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ 為兩個長度皆為 1 的向量。若 $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ 與 $\overrightarrow{u}$ 的夾角為 $75°$，則 $\overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{v}$ 的內積

為 $\dfrac{\text{㉕}\sqrt{\text{㉖}}}{\text{㉗}}$ 。(化為最簡根式)

F. 一個房間的地面是由 12 個正方形所組成，如右圖。今想用長方形瓷磚鋪滿地面，已知每一塊長方形瓷磚可以覆蓋兩個相鄰的正

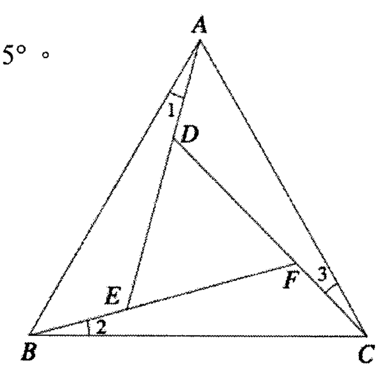


方形，即  或  。則用 6 塊瓷磚鋪滿房間地面的方法有 ㉘㉙ 種。

G. 已知 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 是一個轉移矩陣，並且其行列式(值)為 $\dfrac{5}{8}$ 。則 $a+d=\dfrac{\text{㉚㉛}}{\text{㉜}}$ 。(化為最簡分數)

H. 如圖，正三角形 ABC 的邊長為 1，並且 $\angle 1=\angle 2=\angle 3=15°$ 。已知 $\sin 15°=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，則正三角形 DEF 的邊長為

$\dfrac{\sqrt{\text{㉝}}}{\text{㉞}}-\dfrac{\sqrt{\text{㉟}}}{\text{㊱}}$ 。(化為最簡根式)



參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S=\dfrac{n(2a+(n-1)d)}{2}$

   首項為 a，公比為 $r\ (r\neq 1)$ 的等比數列前 n 項之和為 $S=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 三角函數的和角公式：$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

   $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

   $\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$

3. ΔABC 的正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$ （R 為 ΔABC 外接圓半徑）

   ΔABC 的餘弦定理：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

4. 一維數據 $X:x_1,x_2,\ldots,x_n$，算術平均數 $\mu_X=\dfrac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$

   標準差 $\sigma_X=\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)^2}=\sqrt{\dfrac{1}{n}((\sum_{i=1}^{n}x_i^2)-n\mu_X^2)}$

5. 二維數據 $(X,Y):(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_n,y_n)$，相關係數 $r_{X,Y}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

   迴歸直線(最適合直線)方程式 $y-\mu_Y=r_{X,Y}\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)$

6. 參考數值：$\sqrt{2}\approx 1.414,\ \sqrt{3}\approx 1.732,\ \sqrt{5}\approx 2.236,\ \sqrt{6}\approx 2.449,\ \pi\approx 3.142$

7. 對數值：$\log_{10}2\approx 0.3010,\ \log_{10}3\approx 0.4771,\ \log_{10}5\approx 0.6990,\ \log_{10}7\approx 0.8451$

數學考科

數學考科試題解析

試題編號：1

參考答案：(5)

學科內容：指數、對數函數

測驗目標：對數律的應用

試題解析：由對數律 $\log a^b = b\log a$ （$a>0$, b 為實數)，可知 $\log\left(2^{(3^5)}\right) = 3^5 \log 2$

故正確答案為選項(5)。

試題編號：2

參考答案：(4)

學科內容：空間向量的坐標表示法

測驗目標：空間中兩點的距離公式

試題解析：因 P 點在 xy 平面上，故可設 $P(x,y,0)$ 。

【解法一】

由 $\overline{PA}=\overline{PB}=13$ ，可列式：$\sqrt{(x-5)^2+y^2+12^2}=\sqrt{(x+5)^2+y^2+12^2}=13$

解得唯一解 $x=y=0$ ，故所求的 P 點坐標為 $(0,0,0)$ 。

【解法二】

1. 因「P 為 xy 平面上的點」，可知 P 應為 $(x,y,0)$ ，故選項(5)不正確。
2. 因 $\overline{PA}=\overline{PB}=13$，可將選項(1)~(4)代入 $\sqrt{(x-5)^2+y^2+12^2}=\sqrt{(x+5)^2+y^2+12^2}=13$ 檢驗之。

故正確答案為選項(4)。

試題編號：3

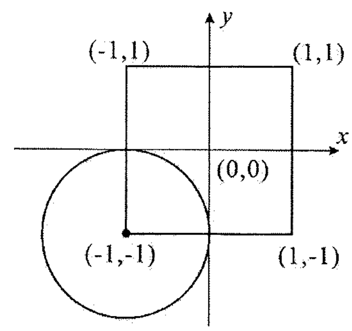
參考答案：(2)

學科內容：圓與直線的關係

測驗目標：圓方程式及圖形進而了解圓與正方形的交點數

試題解析：1. 可將圓的方程式整理為：$(x+1)^2+(y+1)^2=1$，即為圓心在$(-1,-1)$、半徑為 1 的圓。

2. 以$(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$, $(1,-1)$等四個點為頂點的正方形與圓的圖形如右，可看出正方形與圓的交點有 2 個。



故正確答案為選項(2)。

試題編號：4

參考答案：(4)

學科內容：數線上的幾何

測驗目標：絕對值不等式求解

試題解析：分段討論$|4x-12|\le 2x$

1. 當$4x-12\ge 0$ (即$x\ge 3$)，則$4x-12\le 2x$。移項得$2x\le 12$，故得$3\le x\le 6$

2. 當$4x-12<0$ (即$x<3$)，則$12-4x\le 2x$。移項得$6x\ge 12$，故得$2\le x<3$。

綜合上述兩種可能，原不等式的解區間為$[2,6]$，其長度為$6-2=4$。

故正確答案為選項(4)。

試題編號：5

參考答案：(2)

學科內容：二項式定理

測驗目標：評量二項式定理

試題解析：由二項式定理可知

$$(1+\sqrt{2})^6=\sum_{n=0}^{6}C_n^6\sqrt{2}^n$$

$$=1+C_1^6\sqrt{2}+C_2^6(\sqrt{2})^2+C_3^6(\sqrt{2})^3+C_4^6(\sqrt{2})^4+C_5^6(\sqrt{2})^5+C_6^6(\sqrt{2})^6$$

$$=(1+2C_2^6+2^2C_4^6+2^3C_6^6)+(C_1^6+2C_3^6+2^2C_5^6)\sqrt{2}$$

故$b=C_1^6+2C_3^6+2^2C_5^6$，故正確答案為選項(2)。

數學考科

試題編號：6

參考答案：(2)

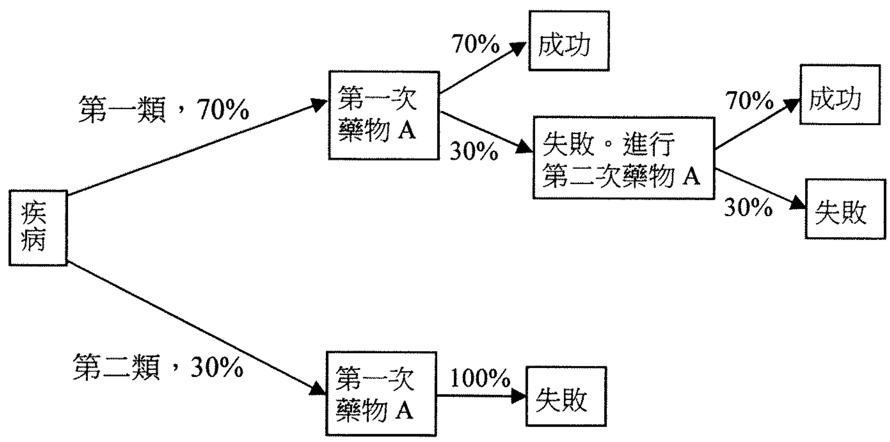
學科內容：條件機率與貝氏定理

測驗目標：了解條件機率定義並應用於生活中

試題解析：1. 先求「**不知道患者所患此疾病的類型，且用藥物 A 第一次療程失敗的情況**」的機率，見下圖。若患者所患疾病類型為第一類且使用藥物 A 第一次療程失敗的機率為 $0.7\times 0.3=0.21$；若所患疾病類型為第二類，使用藥物 A 治療第一次必定失敗，其機率為 $0.3\times 1=0.3$。

2. 因題幹所述「**在不知道患者所患此疾病的類型，且用藥物 A 第一次療程失敗的情況下，進行第二次療程成功**」，意即該患者所患疾病之類型為第一類，才有可能在第二次使用藥物 A 治療時成功，其機率為 $0.7\times 0.3\times 0.7=0.147$。

3. 題設所求之條件機率為 $P(S_2|\ F_1)=\dfrac{P(F_1\cap S_2)}{P(F_1)}=\dfrac{0.147}{0.21+0.3}=\dfrac{147}{510}\approx 0.288$，所接近的選項是 0.3。



試題編號：7

参考答案：(1)(3)(5)

學科內容：簡單多項式函數及其圖形、對數函數、直線方程式及其圖形、圓與直線的關係、拋物線

測驗目標：測驗各函數、方程式的圖形，並搭配整數的性質求格子點

試題解析：依序判定各選項中的圖形上有沒有格子點，如下：

選項(1)：$y=x^2$ 圖形上有格子點 $(0,0)$。

選項(2)：如果 x, y 都是整數，則 $3y,\ 9x$ 都是 3 的倍數，故 $3y-9x$ 也是 3 的倍數，因此 $3y=9x+1$ 的圖形上沒有格子點。

選項(3)：$y^2=-x-2$ 圖形上有格子點 $(-2,0)$

選項(4)：$x^2+y^2=3$，則 $|x|<2,\ |y|<2$，檢查 $(0,0),(\pm1,0),(0,\pm1),(\pm1,\pm1)$ 皆不滿足，

故圓上沒有格子點。

選項(5)：$y=\log_9 x+\dfrac{1}{2}=\log_9 x+\log_9 3=\log_9 3x$，故有格子點 $(3,1)$

故正確答案為選項(1)(3)(5)。

試題編號：8

参考答案：(1)(4)

學科內容：數與數線

測驗目標：帶根號的數字大小估算

試題解析：選項(1)與(2)：由 $3.6^2=12.96<13<3.7^2=13.69$，知 $3.6<\sqrt{13}<3.7$

選項(3)：由試題後方所附之數值知 $\sqrt{3}\approx1.732,\ 1.7<\sqrt{3}<1.8$。又前述 $3.6<\sqrt{13}<3.7$，

所以 $3.6-1.8<\sqrt{13}-\sqrt{3}<3.7-1.7=2$，又 $\sqrt{10}$ 大於3

選項(4)：不等式兩邊直接平方，得 $\left(\sqrt{13}+\sqrt{3}\right)^2=16+2\sqrt{39}>\left(\sqrt{16}\right)^2$

選項(5)：$\dfrac{1}{\sqrt{13}-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{13}+\sqrt{3}}{13-3}=\dfrac{1}{10}(\sqrt{13}+\sqrt{3})$，分子的 $\sqrt{13}+\sqrt{3}$ 不會比 $3.7+1.8=5.5$ 大，

所以該分數會小於 $\dfrac{5.5}{10}=0.55$，當然比 0.6 還小。

故正確答案為選項(1)(4)。

試題編號：9

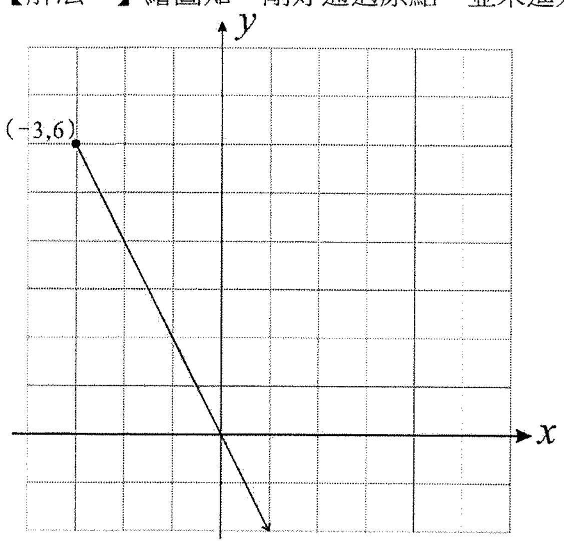
參考答案：(2)(3)(4)

學科內容：平面向量的表示法

測驗目標：測驗平面上的點沿某向量方向前進的概念與係數積的意義

試題解析：計算物體由坐標平面上的點$(-3,6)$出發，沿各選項中的向量所指的方向前進，是否能進入第一象限。

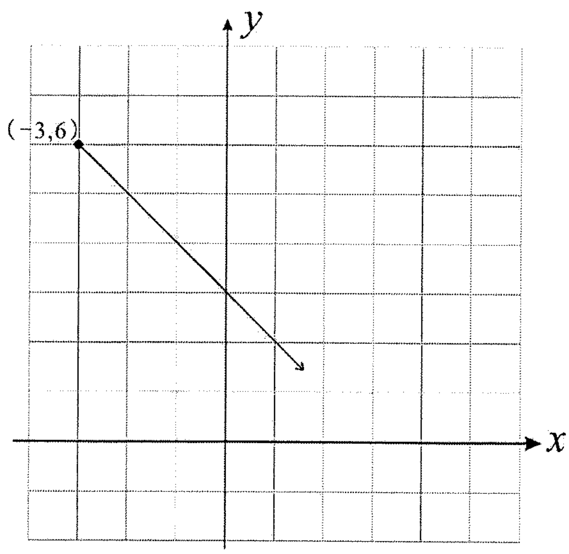
選項(1)：【解法一】繪圖知：剛好通過原點，並未進入第一象限



【解法二】

因$(-3,6)+t(1,-2)$，因$\begin{cases}-3+t>0\\6-2t>0\end{cases}$無解，故未進入第一象限

選項(2)：【解法一】繪圖知：可進入第一象限



【解法二】

因$(-3,6)+t(1,-1)$，當$t=4$，已進入第一象限

選項(3)：因$(-3,6)+t(0.001,0)$，當$t=4000$，已進入第一象限

選項(4)：因 $(-3,6)+t(0.001,1)$，當 $t=4000$，已進入第一象限

選項(5)：因 $\begin{cases}-3-0.001t>0\\ 6+t>0\end{cases}$ 無解，故未進入第一象限

故正確答案為選項(2)(3)(4)。

試題編號：10

參考答案：(3)(4)

學科內容：簡單多項式函數及其圖形、多項式方程式

測驗目標：測驗二次函數的圖形與勘根定理

試題解析：1. 由「$f(x)$ 為實係數二次多項式，且已知 $f(1)>0$， $f(2)<0$， $f(3)>0$」可知：二次函數 $y=f(x)$ 的最高次項係數為正、圖形開口向上、$f(x)=0$ 有兩實根，一根介於 1,2 之間，另一根介於 2,3 之間。

2. 由上述可知：$g(x)=f(x)+(x-2)(x-3)$ 的二次項係數亦為正，故其圖形的開口亦向上。

$g(1)=f(1)+(1-2)(1-3)=f(1)+2>f(1)>0$。又 $g(2)=f(2)+0=f(2)<0$，所以 $g(x)=0$ 也有一實根介於 1,2 之間。

3. 令 α 為 $f(x)=0$ 的最大實根，則 $2<\alpha<3$，故

$g(\alpha)=f(\alpha)+(\alpha-2)(\alpha-3)=0+(\alpha-2)(\alpha-3)<0$。

故正確答案為選項(3)(4)。

數學考科

試題編號：11

參考答案：(2)(3)(5)

學科內容：數列

測驗目標：測驗等差數列的性質

試題解析：已知 $a_1=1>0$，若公差大於等於 0，則 $1=a_1\le a_{100}\le a_{1000}$，而若公差小於 0，則 $1=a_1>a_{100}>a_{1000}$。

選項(2)：若已知 $a_{100}<0$，即 $a_1>a_{100}$，表示公差小於 0，故可得 $a_{1000}<a_{100}<0$。

選項(3)：若已知 $a_{1000}>0$，雖不能知道公差是否大於等於 0，但由於 a_{100} 恆介於 a_1 和 a_{1000} 之間，故可得 $a_{100}>0$。

選項(5)：設公差為 d，則 $a_{1000}-a_{10}=(a_1+999d)-(a_1+9d)=990d$；

$10(a_{100}-a_1)=10\cdot 99d=990d$

選項(1)、(4)的反例：取 $d=-0.005$。此時 $a_{100}=0.505>0$，但 $a_{1000}=-3.995<0$。

故正確答案為選項(2)(3)(5)。

試題編號：12

參考答案：(1)(4)

學科內容：一維數據分析

測驗目標：一維數據資料的判讀與處理

試題解析：選項(1)：直接讀表，四個年齡範圍中，以 40~44 歲的失業率(13.17%)最高。

選項(2)：僅由失業率的高低，無法判讀哪一個年齡範圍的勞動力人數較多。

選項(3)：因為不知道 40~44 歲與 45~49 歲的勞動力人數是否相同，所以在計算 40~49 歲的失業率時，不可以直接取上述兩範圍的失業率的平均數。

選項(4)：【解法一】

類似於選項(3)的想法，如果 35~39 歲與 40~44 歲的勞動力人數相同，則 35~44 歲的失業率會是 9.80%與 13.17%的平均，即 11.485%。但表格內的 35~44 歲的失業率 12.66%較大，故 40~44 歲的勞動力人數較 35~39 歲為多。

【解法二】

假設 35~39 歲與 40~44 歲的勞動力人數分別有 m, n 人

35~39 歲失業人數為 $9.8\%m$，40~44 歲失業人數為 $13.17\%n$

且由失業率的定義知 35~44 歲失業率應為 $\dfrac{9.8\%m+13.17\%n}{m+n}=12.66\%$

展開化簡後得 $9.8m+13.17n=12.66(m+n)$

整理得 $2.86m=0.51n$，勞動人數比 $m:n=0.51:2.86$

故得 40~44 歲的人數較多

選項(5)：一個年齡範圍失業率的改變，不是另一個年齡範圍失業率變化的原因。

故正確答案為選項(1)(4)。

試題編號：A

參考答案：$\dfrac{120}{13}$

學科內容：直角三角形的邊角關係、圓與直線的關係

測驗目標：測驗相似三角形的性質

試題解析：因為 ΔOCD 是直角三角形，$\angle D$ 為直角，所以 $\overline{CD}=\sqrt{\overline{OC}^2-\overline{OD}^2}=\sqrt{26^2-24^2}=\sqrt{100}=10$

【解法一】

由於 ΔOAB 與 ΔOCD 相似（ AA 相似），所以 $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}}=\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OC}}$，故 $\overline{AB}=\overline{CD}\cdot\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OC}}=10\cdot\dfrac{24}{26}=\dfrac{120}{13}$

【解法二】

由定義可知 $\sin\angle AOB=\dfrac{\overline{AB}}{24}=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{OC}}=\dfrac{10}{26}=\dfrac{5}{13}$，解得 $\overline{AB}=\dfrac{120}{13}$。

試題編號：B

參考答案：$6,-9$

學科內容：多項式函數的圖形與多項式不等式

測驗目標：利用一次與二次函數圖形恰交於一點的重根性質求直線方程式

試題解析：1. 將 $y=ax+b$ 代入 $y=x^2$ 可得 $x^2-ax-b=0$。

因有重根，故判別式 $a^2+4b=0\cdots(1)$

2. 將 $y=ax+b$ 代入 $y=(x-2)^2+12$ 可得 $x^2-(4+a)x+(16-b)=0$。

因有重根，故判別式 $(a+4)^2+4(b-16)=0$，即 $a^2+8a-48+4b=0\cdots(2)$

3. 解(1)、(2)聯立，可得 $a=6$，$b=\dfrac{a^2}{-4}=-9$

試題編號：C

參考答案：$4\sqrt{3}$

學科內容：三角測量

測驗目標：直角三角形的邊角關係與簡易三角測量

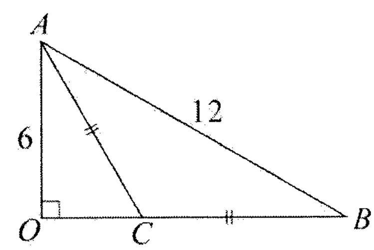
試題解析：【解法一】

如右圖，由畢氏定理知 $\overline{OB}=\sqrt{12^2-6^2}=6\sqrt{3}$。

設 $\overline{AC}=\overline{CB}=x$，由直角三角形 ΔOAC，可列式

$6^2+(6\sqrt{3}-x)^2=x^2$。展開得

$36+108-12\sqrt{3}x+x^2=x^2$，解得 $x=\dfrac{144}{12\sqrt{3}}=4\sqrt{3}$ (公里)



【解法二】

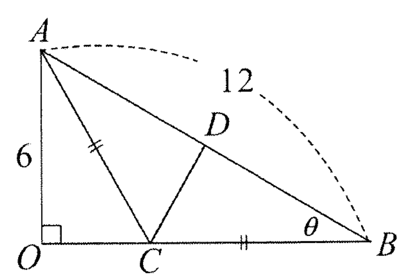
1. 因為 $\sin\theta=\dfrac{\overline{OA}}{\overline{AB}}=\dfrac{6}{12}=\dfrac{1}{2}$，知 $\angle CBD=30^\circ$；

2. 又 $\overline{CA}=\overline{CB}$，所以 $\overline{CD}$ 是 $\overline{AB}$ 之中垂線，

$\angle CAD=\angle CBD=30^\circ$；

3. 因 $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AC}}=\cos(\angle CAD)=\cos 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$\overline{AC}=\overline{AD}\times\dfrac{2}{\sqrt{3}}=6\times\dfrac{2}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}$



試題編號：D

參考答案：$\frac{5}{4}$

學科內容：簡單多項式函數及其圖形、內積與餘弦的關聯、直線的參數式

測驗目標：空間直線參數式、空間向量內積與二次函數的極值

試題解析：1. 由 $C(-2,4,0)$ 、 $D(-1,3,1)$ 決定的直線參數式，可得直線 CD 參數式為 $\begin{cases} x=-2+t \\ y=4-t \\ z=t \end{cases}$ ，其中 t 為實數。可設 P 點坐標為 $(-2+t,4-t,t)$ ，t 為實數。

2. $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(4-t,\ t-4,\ -t)\cdot(5-t,\ t,\ 2-t)$

$$=(4-t)\cdot(5-t)+(t-4)\cdot t+(-t)\cdot(2-t)$$

$$=3t^2-15t+20=3\left(t-\frac{5}{2}\right)^2+20-\frac{75}{4}$$

3. 該內積的最小可能值為 $20-\frac{75}{4}=\frac{5}{4}$

試題編號：E

參考答案：$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

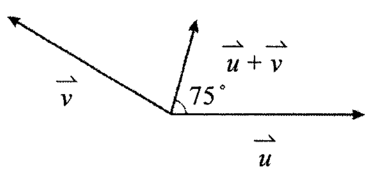
學科內容：內積與餘弦的關聯

測驗目標：測驗向量的基本運算、向量內積與餘弦的關聯

試題解析：1. 如下圖，因為 $\vec{u},\vec{v}$ 兩向量等長，所以 $\vec{u}+\vec{v}$ 平分 $\vec{u},\vec{v}$ 所張的角。

2. 又 $\vec{u}+\vec{v}$ 與 $\vec{u}$ 的夾角為 $75°$ ，可知 $\vec{u},\vec{v}$ 之間的夾角為 $150°$ 。

3. 此兩向量的內積為 $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\theta=1\cdot1\cdot\cos150°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。



試題編號：F

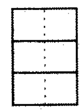
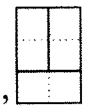
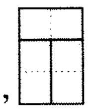
參考答案：11

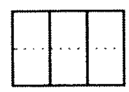
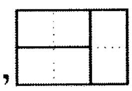
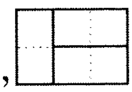
學科內容：邏輯、集合與計數原理

測驗目標：利用乘法原理與加法原理處理的計數問題

試題解析：地板鋪滿房間地面的方式可分為兩大類：

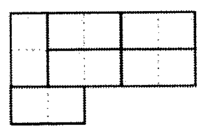
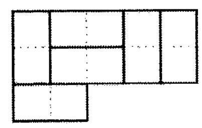
1. 左右可分成一個 3×2 與一個 2×3 的矩形地面時：

將 3×2 的矩形地面分別鋪滿，各有 3 種鋪法，即 ，，；

將 2×3 的矩形地面分別鋪滿，各有 3 種鋪法，即 ，，。

由乘法原理知將這兩個的矩形地面鋪滿，共有 $3\times3=9$ 種方法。

2. 左右不能分成一個 3×2 與一個 2×3 的矩形地面時：

此時地面必呈現以下 2 種鋪法，即 ，。

故共有 $9+2=11$ 種鋪滿的方法。

試題編號：G

參考答案：$\frac{13}{8}$

學科內容：面積公式與二階行列式的定義與性質、矩陣的運算

測驗目標：轉移矩陣的定義與行列式的運算

試題解析：1. 已知 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 是轉移矩陣，故可設 $c=1-a$，$b=1-d$

2. 由「其行列式(值)為 $\frac{5}{8}$」可知：$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=\frac{5}{8}$

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc=ad-(1-d)(1-a)=ad-(1-a-d+ad)=a+d-1$，

$a+d-1=\frac{5}{8}$　可知 $a+d=\frac{5}{8}+1=\frac{13}{8}$

試題編號：H

參考答案：$\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$

學科內容：正弦定理、餘弦定理

測驗目標：測驗正弦定理與三角函數的基本應用

試題解析：1. 因 ΔABC 為正三角形，且 $\angle 1=\angle 2=\angle 3=15°$，可知 ΔFBC 的度數為 $120°, 15°, 45°$。

2. 由正弦定理可知，$\frac{\overline{BC}}{\sin 120°}=\frac{\overline{BF}}{\sin 45°}=\frac{\overline{CF}}{\sin 15°}$。

3. 故正三角形 DEF 的邊長 $\overline{EF}$ 為：$\overline{EF}=\overline{BF}-\overline{BE}=\overline{BF}-\overline{CF}$

$$=\frac{\overline{BC}}{\sin 120°}(\sin 45°-\sin 15°)=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$